

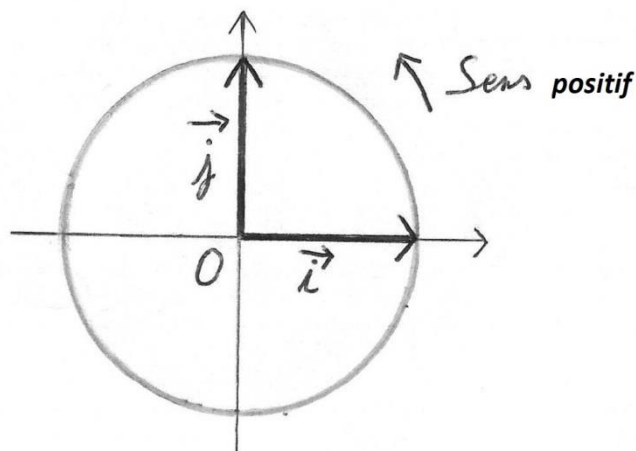
Trigonométrie

Trigonométrie	1
1. Cercle trigonométrique	2
2. Angles orientés	5
3. sinus, cosinus et tangente dans le cercle trigonométrique	6
4. Valeurs remarquables du sinus, du cosinus et de la tangente	7
5. Formules trigonométriques usuelles.....	14
6. Étude de la fonction sinus.....	16
7. Étude de la fonction cosinus.....	17
8. Les formules d'addition.....	18
9. Les formules de duplication	20
10. Équations trigonométriques	21
11. Inéquations trigonométriques.....	31
12. Fonctions $x \mapsto A \sin(Bx + C) + D$	34

Dans ce chapitre, nous utiliserons toujours un repère orthonormal direct du plan $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit un sens positif qui va de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$.



On peut mesurer les angles en degrés mais aussi en radians. On a $180^\circ = \pi \text{ radians}$. Souvent, on écrit $180^\circ = \pi$ et les radians sont sous-entendus.

Remarque : La circonférence du cercle trigonométrique $= 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ unités} = 2\pi$.

Exercice 1

Représenter les valeurs suivantes sur le cercle trigonométrique :

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{-5\pi}{6}.$$

Exercice 2

Représenter les valeurs suivantes sur le cercle trigonométrique :

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{-\pi}{2}, -\pi, \frac{-3\pi}{2}, -2\pi, 10\pi, -5\pi.$$

Exercice 3

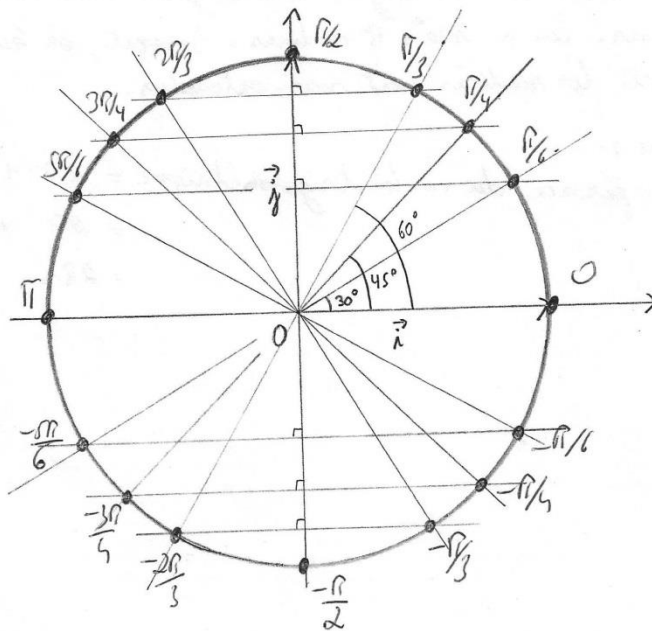
Représenter les valeurs suivantes sur le cercle trigonométrique :

$$\frac{4\pi}{3}, -21\pi, \frac{-9\pi}{4}, \frac{23\pi}{6}, \frac{-17\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}, \frac{-121\pi}{2}, 1620\pi.$$

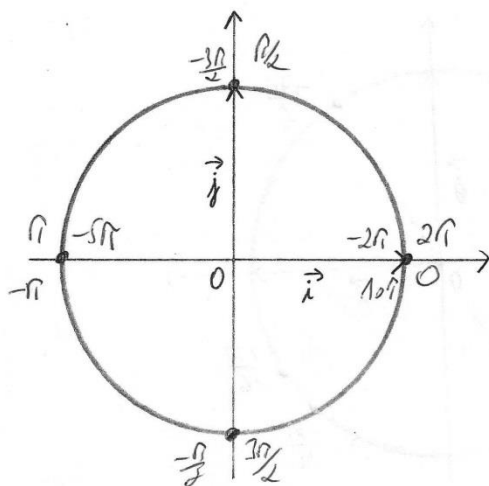
Solution de l'exercice 1

0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{-\pi}{2}$
0°	90°	180°	-90°

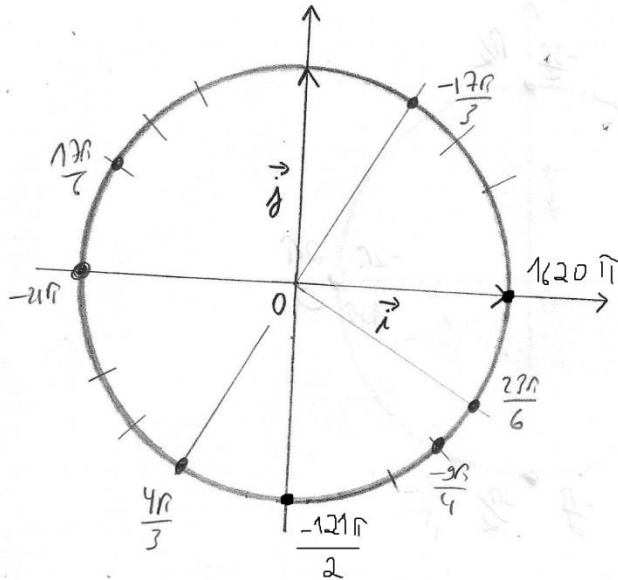
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
0°	45°	60°	120°	135°	150°



Solution de l'exercice 2



Solution de l'exercice 3



$$\frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$-21\pi = -20\pi - \pi = 10(-2\pi) - \pi$$

$$-\frac{9\pi}{4} = -\frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -2\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{23\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 4\pi - \frac{\pi}{6} = 2(2\pi) - \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{17\pi}{3} = -\frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -6\pi + \frac{\pi}{3} = 3(-2\pi) + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{17\pi}{6} = \frac{18\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 3\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{121\pi}{2} = -\frac{120\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -60\pi - \frac{\pi}{2} = 30(-2\pi) - \frac{\pi}{2}$$

$$1620\pi = 810(2\pi)$$

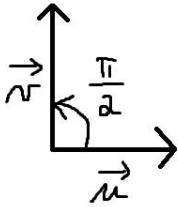
2. Angles orientés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

L'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Cet angle a une mesure principale (strictement supérieure à $-\pi$ et inférieure ou égale à π) ainsi qu'une infinité de mesures.

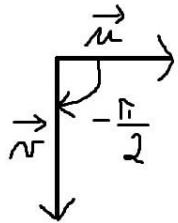
Deux angles orientés sont égaux ssi ils ont la même mesure principale.



Les mesures de $(\vec{u}, \vec{v})$ sont $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \frac{\pi}{2} + 6\pi, \dots$
 $\frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \frac{\pi}{2} - 6\pi, \dots$

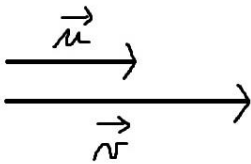
$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$



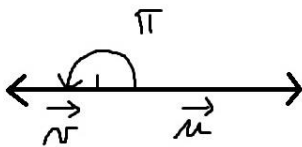
La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-\pi}{2}$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$



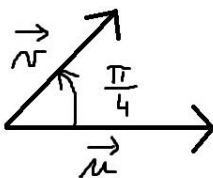
La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = k \cdot 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$



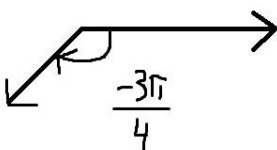
La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \pi + k \cdot 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$



La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$



La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-3\pi}{4}$

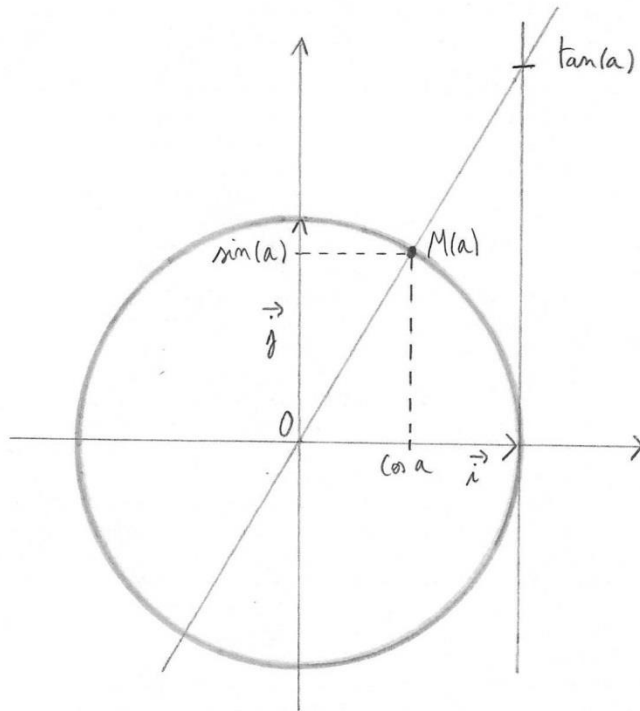
$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

3. sinus, cosinus et tangente dans le cercle trigonométrique

Soit un réel a .

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à a .

Soient les réels x et y tels que $M(x; y)$.



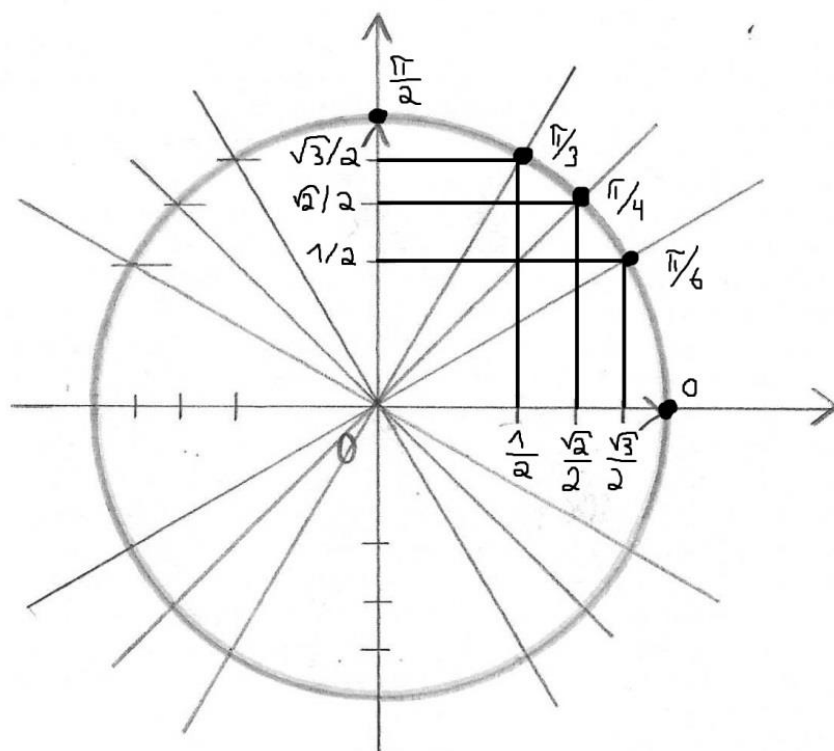
Alors : $\cos a = x$

$\sin a = y$

$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$

si $\cos a \neq 0$.

4. Valeurs remarquables du sinus, du cosinus et de la tangente



a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos a$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan a$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	N'existe pas car on ne peut pas diviser par 0.

Exercice 1

- a) Prouver que $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- b) Prouver que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2

Déterminer graphiquement le sinus, le cosinus et la tangente des valeurs suivantes :

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \\ \frac{-\pi}{6}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{3}, \frac{-\pi}{2}, \\ \frac{-2\pi}{3}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{-5\pi}{6}.$$

Exercice 3

Déterminer graphiquement le sinus, le cosinus et la tangente des valeurs suivantes :

$$5\pi, \frac{11\pi}{2}, \frac{-13\pi}{4}, \frac{19\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}.$$

Solution de l'exercice 1

a) $\sin \frac{\pi}{4} = a$ et $a^2 + a^2 = 1^2$

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

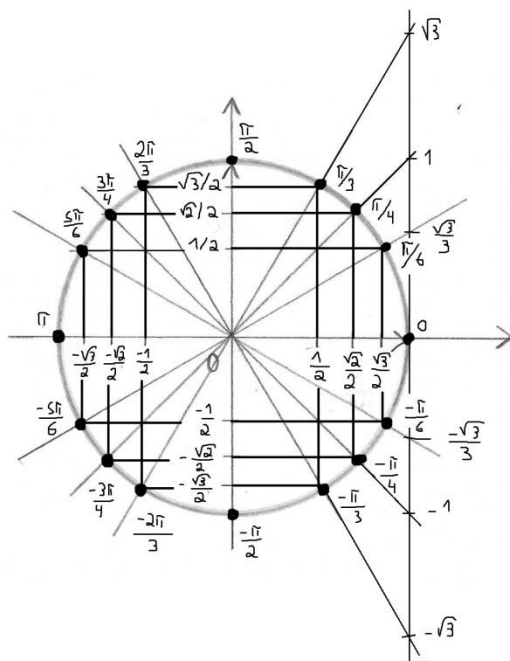
b) $\sin \frac{\pi}{3} = a$ et $a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$

$$a^2 = \frac{3}{4}$$

$$a = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solution de l'exercice 2

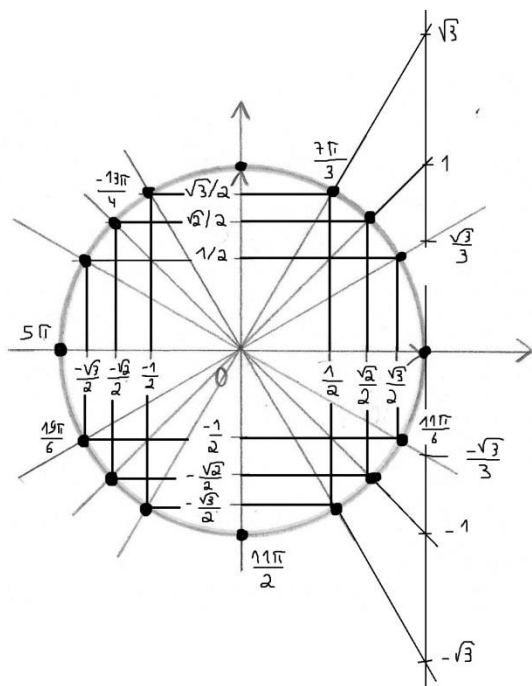


$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$ $\tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$	$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos \frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$	$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\cos \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\tan \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\sin \pi = 0$ $\cos \pi = -1$ $\tan \pi = 0$
---	---	---	---

$\sin \frac{-\pi}{6} = \frac{-1}{2}$ $\cos \frac{-\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan \frac{-\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\sin \frac{-\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\cos \frac{-\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan \frac{-\pi}{4} = -1$	$\sin \frac{-\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\cos \frac{-\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\tan \frac{-\pi}{3} = -\sqrt{3}$	$\sin \frac{-\pi}{2} = -1$ $\cos \frac{-\pi}{2} = 0$ $\tan \frac{-\pi}{2}$ n'existe pas
---	---	---	---

$\sin \frac{-2\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\cos \frac{-2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$ $\tan \frac{-2\pi}{3} = \sqrt{3}$	$\sin \frac{-3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\cos \frac{-3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\tan \frac{-3\pi}{4} = 1$	$\sin \frac{-5\pi}{6} = \frac{-1}{2}$ $\cos \frac{-5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\tan \frac{-5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
--	--	--

Solution de l'exercice 3



$$5\pi = 4\pi + \pi$$

$$\frac{11\pi}{2} = \frac{12\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 6\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{-13\pi}{4} = \frac{-16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = -4\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$\sin 5\pi = 0$ $\cos 5\pi = -1$ $\tan 5\pi = 0$	$\sin \frac{11\pi}{2} = -1$ $\cos \frac{11\pi}{2} = 0$ $\tan \frac{11\pi}{2}$ n'existe pas	$\sin \frac{-13\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos \frac{-13\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\tan \frac{-13\pi}{4} = -1$
--	--	---

$$\frac{19\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = 2\pi + \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$\sin \frac{19\pi}{6} = \frac{-1}{2}$ $\cos \frac{19\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\tan \frac{19\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sin \frac{11\pi}{6} = \frac{-1}{2}$ $\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan \frac{11\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\sin \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\tan \frac{7\pi}{3} = \sqrt{3}$
--	--	---

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 \sin^2 x - 4 \cos^2 x - 7 \sin x$.

Calculer: $f(0)$, $f\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{1013\pi}{6}\right)$.

Solution de l'exercice 4

$$f(0) = -2 \sin^2 0 - 4 \cos^2 0 - 7 \sin 0 = -4$$

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -2 \sin^2\left(\frac{-\pi}{2}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{-\pi}{2}\right) - 7 \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -2 - 0 + 7 = 5$$

$$\frac{1013\pi}{6} = 168\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{1013\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2 \sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 7 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 7 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1013\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2} - 3 - \frac{7}{2} = -7$$

Exercice 5 (facultatif)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{3 \sin(2x) + 2}}{2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}}$.

Calculer la valeur exacte et puis une valeur approchée à 10^{-2} près des nombres suivants : $f(\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{-\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Solution de l'exercice 5

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 \sin(2x) + 2}}{2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}}$$

$$f(\pi) = \frac{\sqrt{3 \sin(2\pi) + 2}}{2 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 0 + 2}}{2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{-2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-2 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}$$

$$f(\pi) \approx 3,41 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

$$f\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3 \sin\left(2 \cdot \frac{-\pi}{4}\right) + 2}}{2 \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2}}{2 \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \cdot (-1) + 2}}{2 \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{-1}}{2 \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{2 \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{-1}}{2 \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}}$$

$f\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ n'existe pas (car on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif).

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + 2}}{2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2}}{2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2}}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}}{2 \cdot 0 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3\sqrt{3} + 4}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 1,52 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3 \sin\left(2 \cdot \frac{5\pi}{12}\right) + 2}}{2 \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 2}}{2 \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 2}}{2 \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 2}}{2 \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 2}}{2 \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 2}}{2 \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}}$$

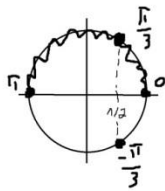
$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ n'existe pas (car on ne peut pas diviser par zéro)

Exercice 6

- $0 \leq x \leq \pi$ et $\cos x = \frac{1}{2}$. Déterminer x et $\sin x$.
- $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Déterminer x et $\cos x$.
- $\pi \leq x \leq 2\pi$ et $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer x et $\sin x$.
- $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{-1}{2}$. Déterminer x et $\cos x$.

Solution de l'exercice 6

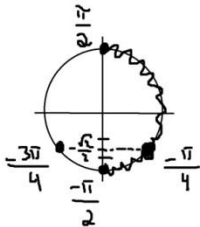
- ① $0 \leq x \leq \pi$ et $\cos x = \frac{1}{2}$. Déterminer x et $\sin x$.



$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

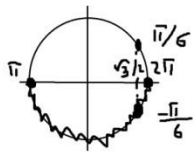
- ② $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Déterminer x et $\cos x$.



$$x = \frac{-\pi}{4}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

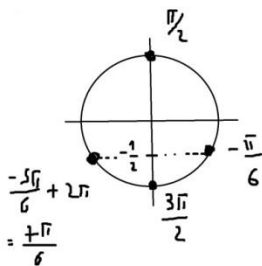
- ③ $\pi \leq x \leq 2\pi$ et $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer x et $\sin x$.



$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

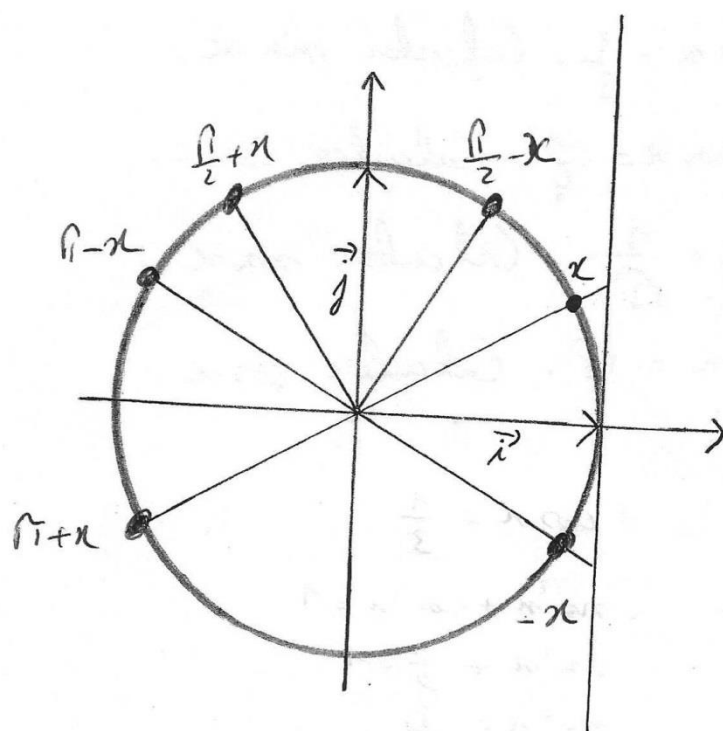
- ④ $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{-1}{2}$. Déterminer x et $\cos x$.



$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

5. Formules trigonométriques usuelles



$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

Exercice

Démontrez que:

- 1) $\cos x + \cos(-x) + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(2\pi + x) = \cos x$;
- 2) $\sin x + \sin(\pi + x) + \sin(3\pi - x) + \sin(2\pi - x) + \sin(-x) = -\sin x$;
- 3) $\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(6\pi - x) = 0$.

Solution de l'exercice

1)

$$\begin{aligned} & \cos x + \cos(-x) + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(2\pi + x) \\ &= \cos x + \cos x - \cos x - \cos x + \cos x \\ &= \cos x \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin(\pi + x) + \sin(3\pi - x) + \sin(2\pi - x) + \sin(-x) \\ &= \sin x - \sin x + \sin x - \sin x - \sin x \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} & \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(6\pi - x) \\ &= \cos x + \sin x + \sin(-x) - \cos x - \cos x + \cos x \\ &= \sin x + \sin(-x) \\ &= \sin x - \sin x \\ &= 0 \end{aligned}$$

6. Étude de la fonction sinus

* Le domaine de définition de la fonction sinus = $\mathbb{R}$.

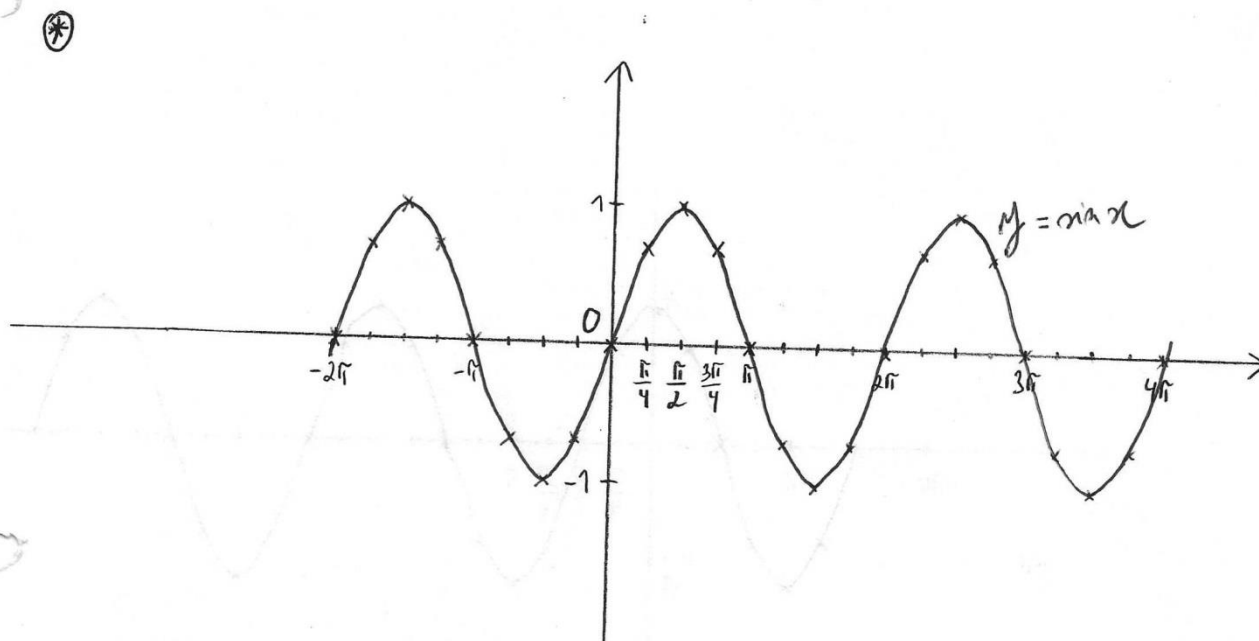
* $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

La fonction sinus est donc 2π -périodique.

* $\sin(-x) = -\sin x$

La fonction sinus est donc impaire.

Graphiquement : La fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine 0 du repère.



x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

7. Étude de la fonction cosinus

⊛ Le domaine de définition de la fonction cosinus est $\mathbb{R}$.

⊛ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

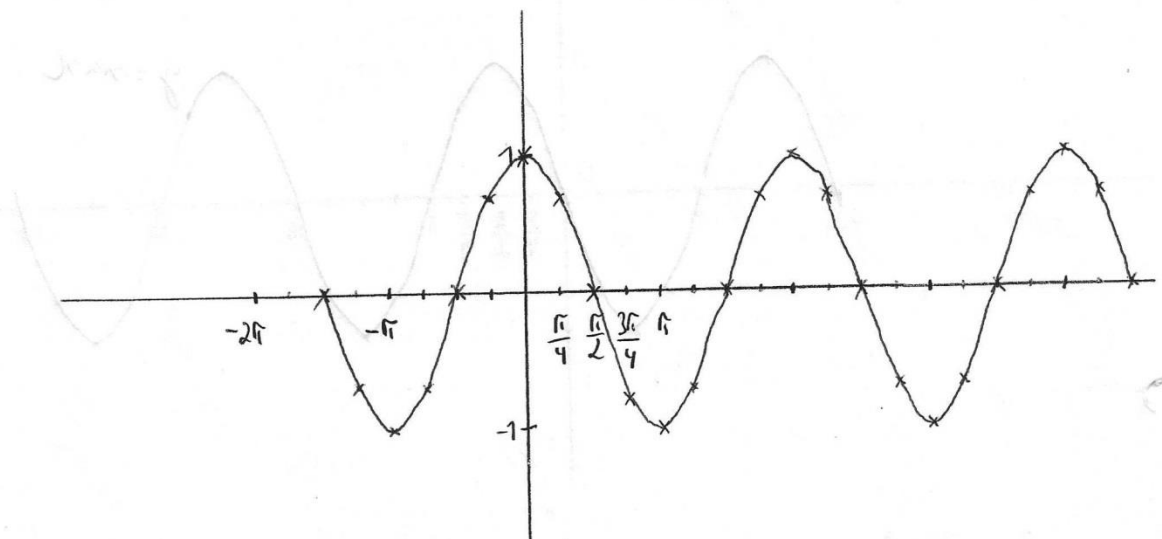
La fonction cosinus est donc 2π -périodique.

⊛ $\cos(-x) = \cos x$

La fonction cosinus est donc paire.

Graphiquement : La fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

⊛



x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

8. Les formules d'addition

Souvenez-vous de la phrase « SICOCO SICOCO SISI. » pour vous souvenir des formules d'addition :

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b ;$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b .$$

Exercice 1

En admettant la formule $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, démontrer les trois autres formules.

Solution de l'exercice 1

$$\begin{aligned}\sin(a - b) &= \sin(a + (-b)) \\ &= \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) \\ &= \sin a \cos b + \cos a (-\sin b) \\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) \\ &= \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a - b) &= \cos(a + (-b)) \\ &= \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a (-\sin b) \\ &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\end{aligned}$$

c.q.f.d.

Exercice 2

Simplifier en faisant disparaître les fonctions trigonométriques.

1) $\cos \frac{7\pi}{12}$

2) $\sin \frac{7\pi}{12}$

3) $\cos \frac{\pi}{12}$

4) $\sin \frac{\pi}{12}$

Aide : $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}$.

Solution de l'exercice 2

1)

$$\begin{aligned}\cos \frac{7\pi}{12} &= \cos \left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} \right) \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\sin \frac{7\pi}{12} &= \sin \left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} \right) \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} \right) \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} \right) \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

9. Les formules de duplication

Les formules de duplication :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 a\end{aligned}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Démonstration

a)

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos(a + a) \\ &= \cos a \cos a - \sin a \sin a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a + \cos^2 a - \cos^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - (\sin^2 a + \cos^2 a) \\ &= 2 \cos^2 a - 1\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a - \sin^2 a + \sin^2 a \\ &= 1 - 2 \sin^2 a\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\sin 2a &= \sin(a + a) \\ &= \sin a \cos a + \cos a \sin a \\ &= 2 \sin a \cos a\end{aligned}$$

c.q.f.d.

10.Équations trigonométriques

Exercice 1

Résoudre dans I et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

- 1) $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$, $I =]-\pi; \pi]$;
- 2) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$, $I = \mathbb{R}$;
- 3) $2 \cos \left(-3x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$, $I = [0; 2\pi[$;
- 4) $2 \sin \left(-4x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$, $I =]-\pi; \pi]$;
- 5) $\sin(4x + \pi) + 1 = 0$, $I = [0; 2\pi[$;
- 6) $\cos(3x + \pi) = 0$, $I =]-\pi; \pi]$.

Exercice 2 (facultatif)

Résoudre dans I et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

- 1) $2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2} = 0$, $I = \mathbb{R}$;
- 2) $\sin \left(\frac{-2x}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$, $I =]-\pi; \pi]$;
- 3) $\cos(2x + \pi) - 1 = 0$, $I = [0; 2\pi[$.

Solution de l'exercice 1

1)

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0, I =]-\pi; \pi]$$

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$I =]-\pi; \pi] = \left] -\frac{4\pi}{4}; \frac{4\pi}{4} \right]$$

k	$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$
...	...
-1	$\frac{\pi}{4} + (-1)2\pi = \frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{-7\pi}{4} \notin I$
0	$\frac{\pi}{4} \in I$
1	$\frac{\pi}{4} + (1)2\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \notin I$
...	...

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$$

k	$x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$
...	...
-1	$\frac{3\pi}{4} + (-1)2\pi = \frac{3\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{-5\pi}{4} \notin I$
0	$\frac{3\pi}{4} \in I$
1	$\frac{3\pi}{4} + (1)2\pi = \frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{11\pi}{4} \notin I$
...	...

2)

$$2 \cos x + \sqrt{3} = 0, I = \mathbb{R}$$

$$2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{-5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{-5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3)

$$2 \cos\left(-3x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0, I = [0; 2\pi[$$

$$2 \cos\left(-3x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos\left(-3x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(-3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } -3x + \frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } -3x = \frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -3x = \frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } -3x = \frac{-2\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } -3x = \frac{-3\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } -3x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -3x \frac{-1}{3} = \left(\frac{\pi}{6} + k2\pi\right) \frac{-1}{3} \text{ ou } -3x \frac{-1}{3} = \left(\frac{-\pi}{2} + k2\pi\right) \frac{-1}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{3} \frac{\pi}{6} + k2\pi \frac{-1}{3} \text{ ou } x = \frac{-1}{3} \frac{-\pi}{2} + k2\pi \frac{-1}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{18} - k \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} - k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{18} + k \frac{12\pi}{18} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k \frac{4\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$I = [0; 2\pi[= \left[0; \frac{36\pi}{18}\right[= \left[0; \frac{12\pi}{6}\right[$$

k	$x = \frac{-\pi}{18} + k \frac{12\pi}{18}$
...	...
0	$\frac{-\pi}{18} \notin I$
1	$\frac{-\pi}{18} + (1) \frac{12\pi}{18} = \frac{11\pi}{18} \in I$
2	$\frac{-\pi}{18} + (2) \frac{12\pi}{18} = \frac{23\pi}{18} \in I$
3	$\frac{-\pi}{18} + (3) \frac{12\pi}{18} = \frac{35\pi}{18} \in I$
4	$\frac{-\pi}{18} + (4) \frac{12\pi}{18} = \frac{47\pi}{18} \notin I$
...	...

k	$x = \frac{\pi}{6} + k \frac{4\pi}{6}$
...	...
-1	$\frac{\pi}{6} + (-1) \frac{4\pi}{6} = \frac{-3\pi}{6} \notin I$
0	$\frac{\pi}{6} \in I$
1	$\frac{\pi}{6} + (1) \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in I$
2	$\frac{\pi}{6} + (2) \frac{4\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \in I$
3	$\frac{\pi}{6} + (3) \frac{4\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} \notin I$
...	...

$$S = \left\{ \frac{11\pi}{18}; \frac{23\pi}{18}; \frac{35\pi}{18}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right\}$$

4)

$$2 \sin \left(-4x + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} = 0, I =]-\pi; \pi]$$

$$2 \sin \left(-4x + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \left(-4x + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(-4x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -4x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } -4x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -4x = +k2\pi \text{ ou } -4x = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -4x = k2\pi \text{ ou } -4x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{-4} \text{ ou } x = \frac{1}{-4} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{-4} k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -k \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{-\pi}{12} - k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -k \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{-\pi}{12} - k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{-\pi}{12} + k \frac{6\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$$I =]-\pi; \pi] = \left] \frac{-2\pi}{2}; \frac{2\pi}{2} \right] = \left] \frac{-12\pi}{12}; \frac{12\pi}{12} \right]$$

k	$x = k \frac{\pi}{2}$
...	...
-2	$(-2) \frac{\pi}{2} = \frac{-2\pi}{2} \notin I$
-1	$(-1) \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2} \in I$
0	$0 \in I$
1	$(1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \in I$
2	$(2) \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi \in I$
3	$(3) \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \notin I$
...	...

k	$x = \frac{-\pi}{12} + k \frac{6\pi}{12}$
...	...
-2	$\frac{-\pi}{12} + (-2) \frac{6\pi}{12} = \frac{-13\pi}{12} \notin I$
-1	$\frac{-\pi}{12} + (-1) \frac{6\pi}{12} = \frac{-7\pi}{12} \in I$
0	$\frac{-\pi}{12} \in I$
1	$\frac{-\pi}{12} + (1) \frac{6\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \in I$
2	$\frac{-\pi}{12} + (2) \frac{6\pi}{12} = \frac{11\pi}{12} \in I$
3	$\frac{-\pi}{12} + (3) \frac{6\pi}{12} = \frac{17\pi}{12} \notin I$
...	...

$$S = \left\{ \frac{-\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{-7\pi}{12}; \frac{-\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{12} \right\}$$

5)

$$\sin(4x + \pi) + 1 = 0, I = [0; 2\pi[$$

$$\sin(4x + \pi) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(4x + \pi) = -1$$

$$\Leftrightarrow 4x + \pi = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \text{ ou } -4x + \pi = \pi - \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x + \pi = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \text{ ou } -4x + \pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x + \pi = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{-\pi}{2} - \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{-\pi}{2} - \frac{2\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = -\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} + k2\pi \cdot \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + k \frac{4\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

$$I = [0; 2\pi[= \left[0; \frac{16\pi}{8}\right[$$

k	$x = -\frac{3\pi}{8} + k \frac{4\pi}{8}$
...	...
0	$-\frac{3\pi}{8} \notin I$
1	$-\frac{3\pi}{8} + (1) \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{8} \in I$
2	$-\frac{3\pi}{8} + (2) \frac{4\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} \in I$
3	$-\frac{3\pi}{8} + (3) \frac{4\pi}{8} = \frac{9\pi}{8} \in I$
4	$-\frac{3\pi}{8} + (4) \frac{4\pi}{8} = \frac{13\pi}{8} \in I$
5	$-\frac{3\pi}{8} + (5) \frac{4\pi}{8} = \frac{17\pi}{8} \notin I$
...	...

$$S = \left\{ \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{13\pi}{8} \right\}$$

6)

$$\cos(3x + \pi) = 0, I =]-\pi; \pi]$$

$$\cos(3x + \pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + \pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ ou } 3x + \pi = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$I =]-\pi; \pi] = \left] -\frac{6\pi}{6}; \frac{6\pi}{6} \right]$$

k	$x = \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{6}$
...	...
-3	$\frac{-\pi}{6} + (-3)\frac{2\pi}{6} = \frac{-7\pi}{6} \notin I$
-2	$\frac{-\pi}{6} + (-2)\frac{2\pi}{6} = \frac{-5\pi}{6} \in I$
-1	$\frac{-\pi}{6} + (-1)\frac{2\pi}{6} = \frac{-3\pi}{6} = \frac{-\pi}{2} \in I$
0	$\frac{-\pi}{6} \in I$
1	$\frac{-\pi}{6} + (1)\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \in I$
2	$\frac{-\pi}{6} + (2)\frac{2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \in I$
3	$\frac{-\pi}{6} + (3)\frac{2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in I$
4	$\frac{-\pi}{6} + (4)\frac{2\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \notin I$
...	...

$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{6}; \frac{-\pi}{2}; \frac{-\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Solution de l'exercice 2

1)

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2} = 0, I = \mathbb{R}$$

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{9\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{\frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{13\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2)

$$\sin\left(\frac{-2x}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) = 0, I =]-\pi; \pi]$$

$$\sin\left(\frac{-2x}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{3} + \frac{3\pi}{4} = 0 + k2\pi \text{ ou } \frac{-2x}{3} + \frac{3\pi}{4} = \pi - 0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{3} + \frac{3\pi}{4} = 0 + k2\pi \text{ ou } \frac{-2x}{3} + \frac{3\pi}{4} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{3} + \frac{3\pi}{4} = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{3} = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x-3}{3} = -\frac{3\pi-3}{4} + k\pi \frac{-3}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{9\pi}{8} + k \frac{-3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9\pi}{8} - k \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9\pi}{8} + k \frac{12\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

$$I =]-\pi; \pi] = \left] \frac{-8\pi}{8}; \frac{8\pi}{8} \right]$$

k	$x = \frac{9\pi}{8} + k \frac{12\pi}{8}$
...	...
-2	$\frac{9\pi}{8} + (-2) \frac{12\pi}{8} = -\frac{15\pi}{8} \notin I$
-1	$\frac{9\pi}{8} + (-1) \frac{12\pi}{8} = -\frac{3\pi}{8} \in I$
0	$\frac{9\pi}{8} \notin I$
...	...

$$S = \left\{ \frac{-3\pi}{8} \right\}$$

3)

$$\cos(2x + \pi) - 1 = 0, I = [0; 2\pi[$$

$$\cos(2x + \pi) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + \pi) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + \pi = 0 + k2\pi \text{ ou } 2x + \pi = -0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \pi = 0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$I = [0; 2\pi[= \left[0; \frac{4\pi}{2}\right[$$

k	$x = \frac{-\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2}$
...	...
0	$\frac{-\pi}{2} \notin I$
1	$\frac{-\pi}{2} + (1)\frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \in I$
2	$\frac{-\pi}{2} + (2)\frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \in I$
3	$\frac{-\pi}{2} + (3)\frac{2\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \notin I$
...	...

$$S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$$

Exercice 3 (facultatif)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 \sin^2 x - 4 \cos^2 x - 7 \sin x$.

- Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = (2 \sin x + 1)(\sin x - 4)$.
- En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

Solution de l'exercice 3

a)

$$\begin{aligned} & (2 \sin x + 1)(\sin x - 4) \\ &= 2 \sin^2 x - 8 \sin x + \sin x - 4 \\ &= 2 \sin^2 x - 8 \sin x + \sin x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= -2 \sin^2 x - 4 \cos^2 x - 7 \sin x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow (2 \sin x + 1)(\sin x - 4) = 0 \\ & \Leftrightarrow 2 \sin x + 1 = 0 \text{ ou } \sin x - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1}{2} \text{ ou } \sin x = 4 \\ & \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1}{2} \text{ car } -1 \leq \sin x \leq 1 \\ & \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{-\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$I = [0; 2\pi[= \left[0; \frac{12\pi}{6}\right[$$

k	$x = \frac{-\pi}{6} + k \frac{12\pi}{6}$
...	...
0	$\frac{-\pi}{6} \notin I$
1	$\frac{-\pi}{6} + (1) \frac{12\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \in I$
2	$\frac{-\pi}{6} + (2) \frac{12\pi}{6} = \frac{23\pi}{6} \notin I$
...	...

k	$x = \frac{7\pi}{6} + k \frac{12\pi}{6}$
...	...
-1	$\frac{7\pi}{6} + (-1) \frac{12\pi}{6} = \frac{-5\pi}{6} \notin I$
0	$\frac{7\pi}{6} \in I$
1	$\frac{7\pi}{6} + (1) \frac{12\pi}{6} = \frac{19\pi}{6} \notin I$
...	...

$$S = \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$$

11. Inéquations trigonométriques

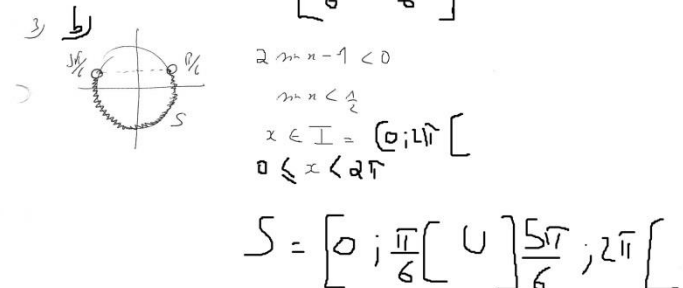
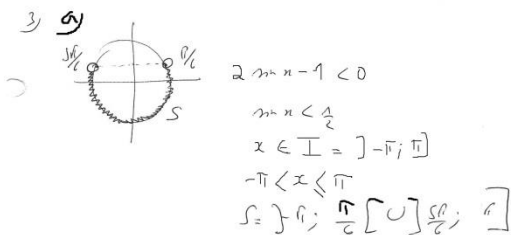
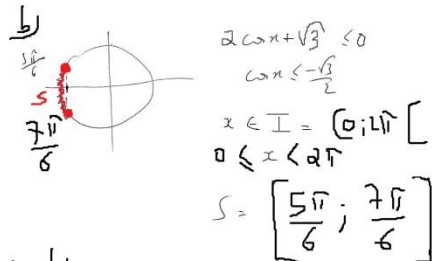
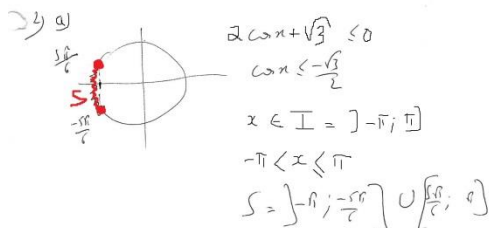
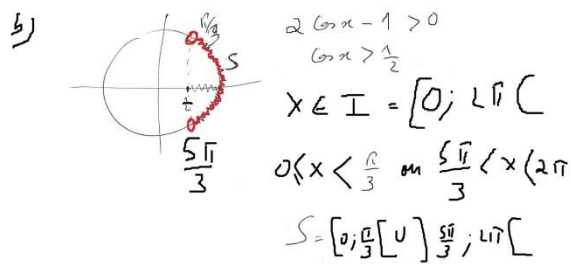
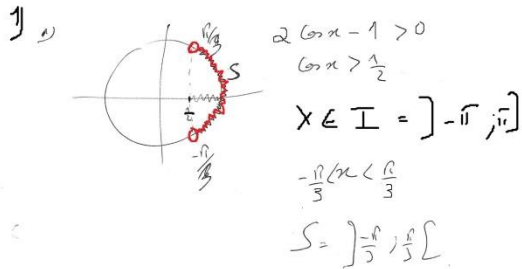
Exercice 1

Résoudre dans I et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

- | | |
|---|--|
| 1) a) $2 \cos x - 1 > 0, I =]-\pi; \pi]$ | b) $2 \cos x - 1 > 0, I = [0; 2\pi[$ |
| 2) a) $2 \cos x + \sqrt{3} \leq 0, I =]-\pi; \pi]$ | b) $2 \cos x + \sqrt{3} \leq 0, I = [0; 2\pi[$ |
| 3) a) $2 \sin x - 1 < 0, I =]-\pi; \pi]$ | b) $2 \sin x - 1 < 0, I = [0; 2\pi[$ |

Solution de l'exercice 1

Exercice 1 de la séance



Exercice 2 (facultatif)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{2 \sin(x) + \sqrt{3}}}{2 \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{2}}$ sur $[0; 2\pi[$.

Déterminer et représenter sur le cercle trigonométrique $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f .

Exercice 3 (facultatif)

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{\sqrt{-2 \cos(x) + 1}}{2 \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 1}$ sur $]-\pi; \pi]$.

Déterminer et représenter sur le cercle trigonométrique $\mathcal{D}_g$, l'ensemble de définition de g .

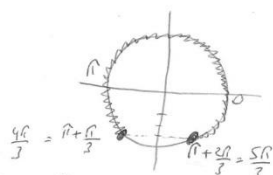
Solution de l'exercice 2

$$f(x) = \frac{\sqrt{2} \sin(x) + \sqrt{3}}{2 \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{2}} \quad \text{sur } [0; 2\pi[$$

C.E.: ① $x \in [0; 2\pi[$

② $2 \sin(x) + \sqrt{3} \geq 0$

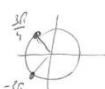
$$\sin x \geq \frac{-\sqrt{3}}{2}$$



$$x \in [0; \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}; 2\pi[$$

③ $2 \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{2} \neq 0$

$$\cos(x + \frac{\pi}{3}) \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad \text{et} \quad x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{5\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{9\pi}{12} - \frac{\pi}{12} + k2\pi \quad \text{et} \quad x \neq -\frac{9\pi}{12} - \frac{\pi}{12} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

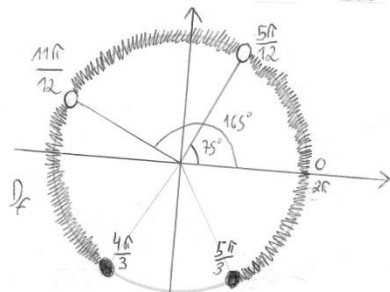
$$x \neq \frac{8\pi}{12} + k2\pi \quad \text{et} \quad x \neq -\frac{10\pi}{12} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad x \neq \frac{11\pi}{6}$$

k	$x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$
$\vdots$	
-1	$\frac{-19\pi}{12} \notin [0; 2\pi[= \text{I}$
0	$\frac{5\pi}{12} \in \text{I}$
1	$\frac{29\pi}{12} \notin \text{I}$
$\vdots$	

k	$x = -\frac{13\pi}{12} + k2\pi$
$\vdots$	
0	$-\frac{13\pi}{12} \notin \text{I}$
1	$\frac{11\pi}{12} \in \text{I}$
2	$\frac{35\pi}{12} \notin \text{I}$
$\vdots$	

$$D_f = [0; \frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}[\cup]\frac{11\pi}{12}; \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}; 2\pi[$$



$$\pi \longrightarrow 180^\circ$$

$$\frac{5\pi}{12} \longrightarrow 75^\circ$$

$$\frac{11\pi}{12} \longrightarrow 165^\circ$$

$$\frac{4\pi}{3} \longrightarrow 120^\circ$$

Solution de l'exercice 3

$$g(x) = \frac{\sqrt{-2\cos x + 1}}{2\sin(x + \frac{\pi}{3}) + 1} \quad \text{sur }]-\pi; \pi]$$

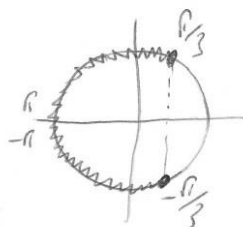
CE : ① $x \in]-\pi; \pi]$

② $-2\cos x + 1 \geq 0$

$$\cos x \leq \frac{-1}{-2}$$

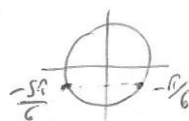
$$\cos x \leq \frac{1}{2}$$

$$x \in]-\pi; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi]$$



③ $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) + 1 \neq 0$

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) \neq -\frac{1}{2}$$



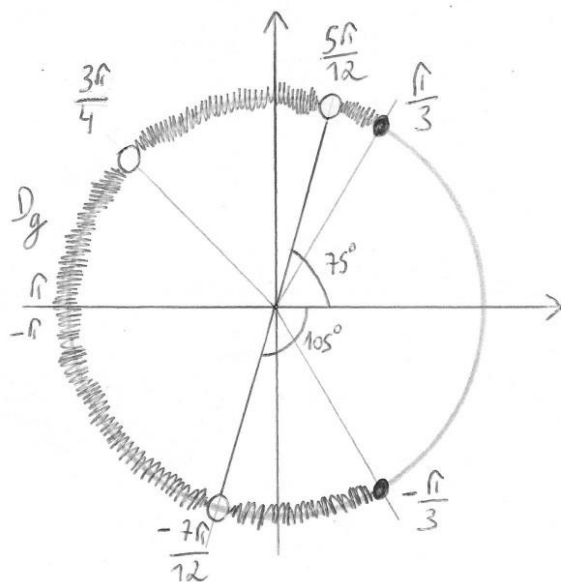
$$2x + \frac{\pi}{3} \neq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{et} \quad x + \frac{\pi}{3} \neq -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x \neq -\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} + k2\pi \quad \text{et} \quad x \neq -\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq -\frac{3\pi}{12} + k\pi \quad \text{et} \quad x \neq -\frac{7\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq -\frac{3\pi}{12} \quad \text{et} \quad x \neq \frac{9\pi}{12} \quad \text{et} \quad x \neq -\frac{7\pi}{12} \quad \text{et} \quad x \neq \frac{5\pi}{12}$$

$$D_g =]-\pi; -\frac{7\pi}{12}[\cup]-\frac{7\pi}{12}; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{12}[\cup]\frac{5\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; \pi]$$



12. Fonctions $x \mapsto A \sin(Bx + C) + D$

Propriété

Soient $A \in \mathbb{R}^*$, $B \in \mathbb{R}^*$, $C \in \mathbb{R}$ et $D \in \mathbb{R}$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto A \sin(Bx + C) + D.$$

Alors f est $\frac{2\pi}{|B|}$ -périodique

$$\forall p \in \left]0; \frac{2\pi}{|B|}\right[, f \text{ n'est pas } p\text{-périodique.}$$

Remarque : on a le même propriété avec $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto A \cos(Bx + C) + D$.

Remarque : « 0 - périodique » n'est pas permis.

Démonstration

Soit un x quelconque appartenant à l'ensemble de définition de f .

- $x \in \mathbb{R}$
- $x + \frac{2\pi}{|B|} \in \mathbb{R}$
- $x + \frac{2\pi}{|B|} \in \mathcal{D}_f$
- $$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{|B|}\right) &= A \sin\left(B\left(x + \frac{2\pi}{|B|}\right) + C\right) + D = A \sin\left(Bx + B \frac{2\pi}{|B|} + C\right) + D \\ &= A \sin(Bx \pm 2\pi + C) + D = A \sin(Bx + C) + D = f(x) \end{aligned}$$

Donc, f est $\frac{2\pi}{|B|}$ -périodique.

Soit un p quelconque appartenant à l'intervalle $\left]0; \frac{2\pi}{|B|}\right[$.

Supposons que f est p -périodique.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : \quad & f(x + p) = f(x) \\ & f(x + p) = A \sin(B(x + p) + C) + D = A \sin(Bx + Bp + C) + D \\ & f(x) = A \sin(Bx + C) + D \\ & A \sin(Bx + Bp + C) + D = A \sin(Bx + C) + D \\ & \sin(Bx + Bp + C) = \sin(Bx + C). \end{aligned}$$

En prenant $x = \frac{\frac{\pi}{2} - C}{B}$:

$$\sin\left(B \frac{\frac{\pi}{2} - C}{B} + Bp + C\right) = \sin\left(B \frac{\frac{\pi}{2} - C}{B} + C\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - C + Bp + C\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - C + C\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + Bp\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + Bp\right) = 1$$

$$Bp = k 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$B \in \mathbb{R}^* \text{ et } p \neq 0$$

$$Bp = k 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

$$Bp \leq 2\pi \text{ ou } 2\pi \leq Bp$$

$$\text{non}(-2\pi < Bp < 2\pi)$$

Mais : $0 < p < \frac{2\pi}{|B|}$

Si $B > 0$ alors $0 < Bp < 2\pi$.

Si $B < 0$ alors $0 > Bp > \frac{2\pi B}{|B|}$; $0 > Bp > \frac{2\pi(-|B|)}{|B|}$; $0 > Bp > -2\pi$.

$-2\pi < Bp < 2\pi$

Ce n'est pas possible. Alors, f n'est pas p -périodique.

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto A \cos(Bx + C) + D$.

Alors : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto A \sin\left(\frac{\pi}{2} - (Bx + C)\right) + D$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto A \sin\left(-Bx + \left(\frac{\pi}{2} - C\right)\right) + D$

et on a donc aussi la propriété avec $\cos$.

c.q.f.d.

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(2x)$.

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Dessiner les courbes de f , g et h dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(2x)$.

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Dessiner les courbes de f , g et h dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $[0; 2\pi[$ par $f(x) = 5 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + 1$ et $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f .

Dessiner la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

Exercice 4

Soit la fonction g définie sur $[0; 2\pi[$ par $g(x) = -3 \cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$ et $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de g .

Dessiner la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

Exercice 5 (facultatif)

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3 \sin\left(-x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ sur $[0; 2\pi[$ et $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f .

Dessiner la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

Exercice 6 (facultatif)

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + 1$. Prouver que pour tout x de $\mathbb{R}$: $-4 \leq f(x) \leq 6$.
- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3 \cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$. Prouver que pour tout x de $\mathbb{R}$: $-5 \leq f(x) \leq 1$.
- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \sin\left(-x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$. Prouver que pour tout x de $\mathbb{R}$: $-1 \leq f(x) \leq 5$.

Solution de l'exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(2x)$.

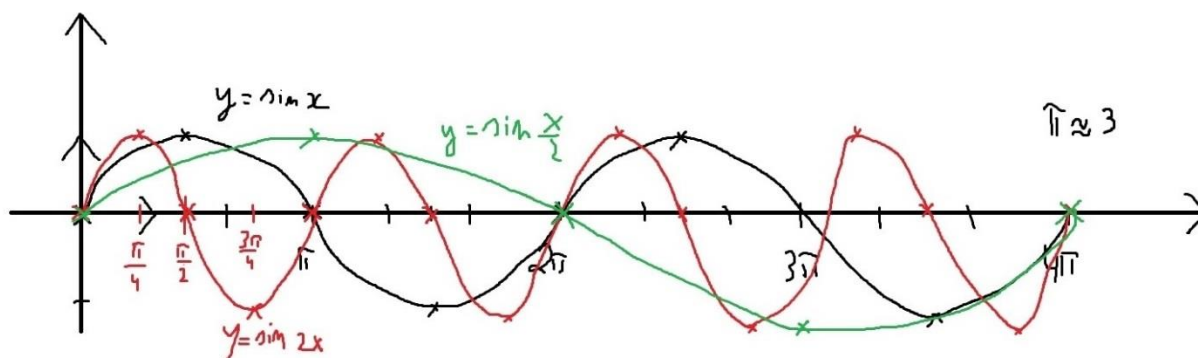
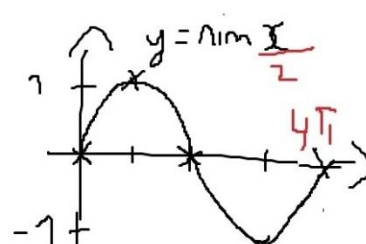
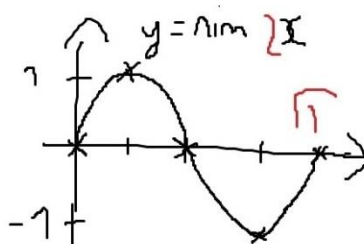
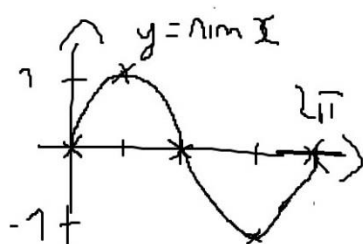
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Dessiner les courbes de f , g et h dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

La plus petite période strictement positive de la fonction $x \mapsto \sin x$ est 2π .

La plus petite période strictement positive de la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

La plus petite période strictement positive de la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ est $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \frac{2}{1} = 4\pi$.



Solution de l'exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(2x)$.

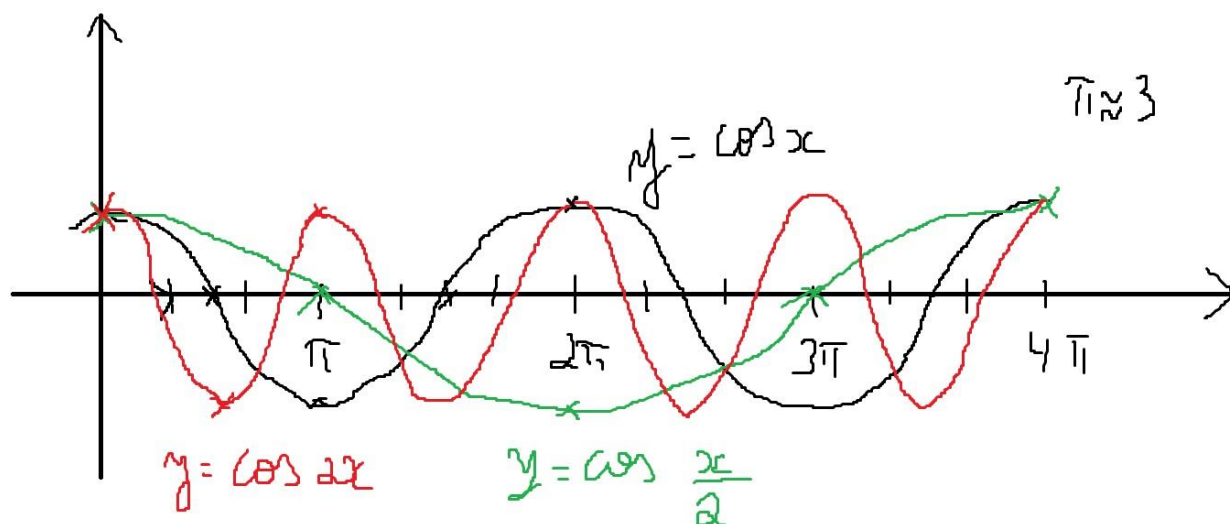
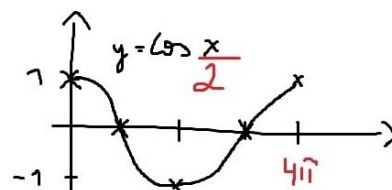
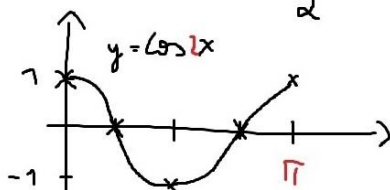
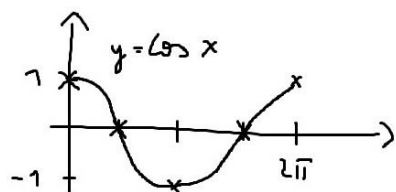
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Dessiner les courbes de f , g et h dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

La plus petite période strictement positive de la fonction $x \mapsto \cos x$ est 2π .

La plus petite période strictement positive de la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

La plus petite période strictement positive de la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ est $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \frac{2}{1} = 4\pi$.

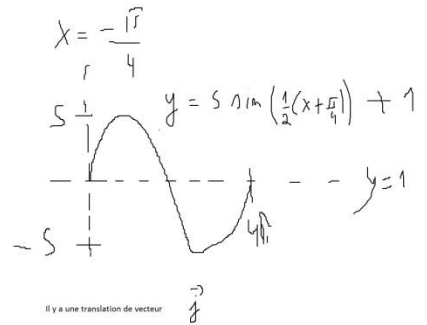
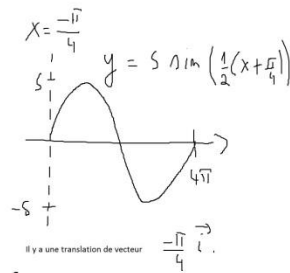
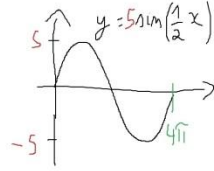
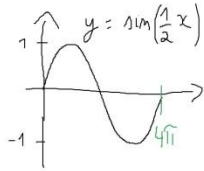


Solution de l'exercice 3

Soit la fonction f définie sur $[0; 2\pi]$ par $f(x) = 5 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ et (C_f) la courbe représentative de f .
Dessiner la courbe (C_f) dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

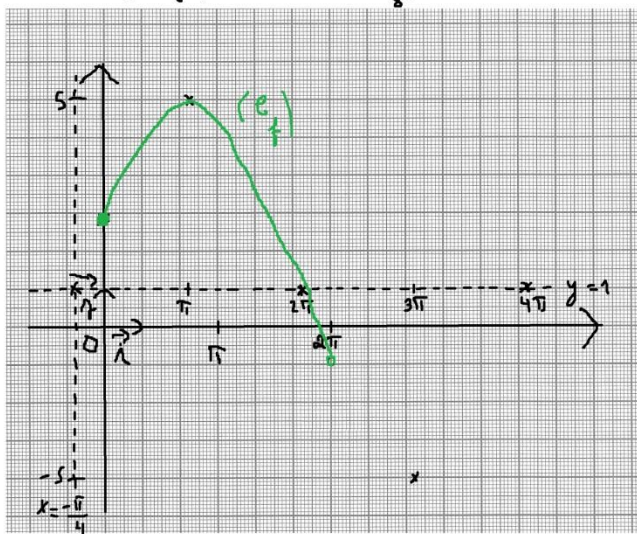
La plus petite période strictement positive est : $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

$$f(x) = 5 \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1$$



$$f(0) = 5 \sin\left(\frac{0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 5 \sin\frac{\pi}{4} + 1 \approx 2,9$$

$$f(2\pi) = 5 \sin\left(\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 5 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \approx -0,9$$



$$\pi \approx 3$$

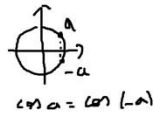
$$\pi \rightarrow 3 \text{ cm}$$

$$\frac{\pi}{4} \rightarrow 0,75 \text{ cm} \approx 0,8 \text{ cm}$$

Solution de l'exercice 4

Soit la fonction g définie sur $[0; 2\pi[$ par $g(x) = -3 \cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$ et (C_g) la courbe représentative de g .
 Dessiner la courbe (C_g) dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

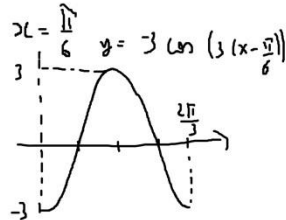
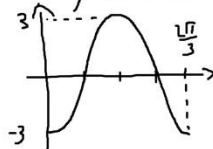
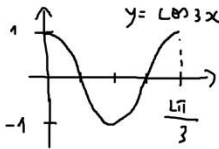
La plus petite période strictement négative de g est $\frac{2\pi}{1 \cdot 3} = \frac{2\pi}{3}$



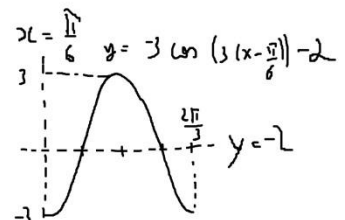
$$g(x) = -3 \cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 = -3 \cos\left(-3x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$$

$$= -3 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$$

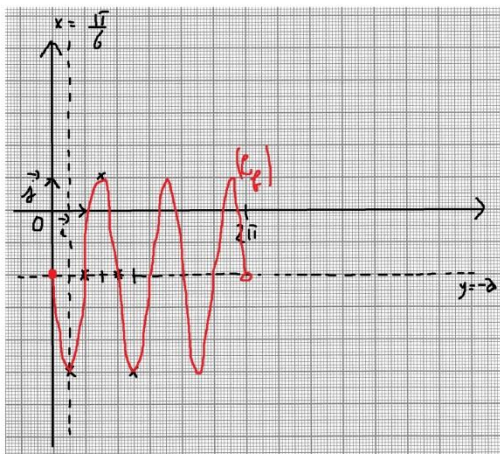
$$= -3 \cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) - 2$$



Il y a une translation de vecteur $\frac{\pi}{6} \vec{i}$.



Il y a une translation de vecteur $-2 \vec{j}$.



$$\frac{\pi}{6} \approx 0.5$$

$$2\pi \rightarrow 6$$

$$\frac{2\pi}{3} \rightarrow 2$$

$$f(0) = -3 \cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - 2 = -2$$

$$f(2\pi) = -3 \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) - 2 = -2$$

Solution de l'exercice 6

a)

$$-1 \leq \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \leq 1$$

$$-5 \leq 5 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \leq 5$$

$$-5 + 1 \leq 5 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + 1 \leq 5 + 1$$

$$-4 \leq f(x) \leq 6$$

b)

$$-1 \leq \cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$$

$$3 \geq -3 \cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right) \geq -3$$

$$3 - 2 \geq -3 \cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 \geq -3 - 2$$

$$1 \geq f(x) \geq -5$$

c)

$$-1 \leq \sin\left(-x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

$$-3 \leq 3 \sin\left(-x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 3$$

$$-3 + 2 \leq 3 \sin\left(-x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \leq 3 + 2$$

$$-1 \leq f(x) \leq 5$$